E.N.S.E.T. section A3 (programme C) 1979

Durée : 4 heures

*Dans ce problème, on propose l'étude de fonctions définies par certaines intégrales généralisées; dans la deuxième partie, ces fonctions sont des densités de probabilité. L'emploi, pour ces intégrales généralisées, de propriétés valables pour des intégrales habituelles de Riemann ou de Riemann-Stieltjes, par exemple la formule classique d'intégration par parties, réclame des justifications, notamment au moyen de passages à la limite.*

## PREMIÈRE PARTIE

$x$ étant un réel strictement positif donné, on considère les fonctions U, V, $f$, $g$, $h$ de la variable réelle $\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) définies par les intégrales généralisées :

$$U(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \cos u}{(u+x)^3}\, du\,, \qquad V(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{(u+x)^3}\, du.$$

$$f(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \cos u}{(u+x)^2}\, du\,, \quad g(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{(u+x)^2}\, du\,, \quad h(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{u+x}\, du.$$

1° Montrer l'existence, pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, des intégrales définissant U, V, $f$, $g$, et, pour tout réel $\lambda > 0$ de l'intégrale définissant $h$.

2° *a.* Calculer les intégrales $F(u) = \int_0^u e^{-\lambda t} \cos t\, dt$ et $\int_0^u e^{-\lambda t} \sin t\, dt = G(u)$.

*b.* A l'aide d'intégrations par parties que l'on justifiera, montrer les relations suivantes :

$$\forall \lambda \geqslant 0 \begin{cases} (1+\lambda^2) f(\lambda) = \dfrac{\lambda}{x^2} - 2\lambda U(\lambda) + 2 V(\lambda) \\ (1+\lambda^2) g(\lambda) = \dfrac{1}{x^2} - 2\lambda V(\lambda) - 2 U(\lambda) \end{cases}$$

$$\forall \lambda > 0 \qquad (1+\lambda^2) h(\lambda) = \frac{1}{x} - f(\lambda) - \lambda g(\lambda)$$

On démontrera également que $h(0)$ existe et que

$$h(0) = \frac{1}{x} - f(0).$$

3° *a.* Montrer que :

$$\forall \lambda \geqslant 0 \qquad \forall u \geqslant 0 \qquad |\, e^{-\lambda u} - 1 \,| \leqslant \lambda u.$$

*b.* En déduire que

$$\lim_{\lambda \to 0+} |\, U(\lambda) - U(0) \,| = \lim_{\lambda \to 0+} |\, V(\lambda) - V(0) \,| = 0.$$

*c.* En déduire, en utilisant les égalités précédentes, les continuités de $f$, $g$, $h$ au point $\lambda = 0$ à droite.

*d.* Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = 0$.

.../...

4° *a.* Montrer l'inégalité :

$$\forall \lambda_0 > 0\,, \quad \forall u \geqslant 0\,, \quad \forall \lambda > \frac{\lambda_0}{2} \quad \left| e^{-\lambda u} - e^{-\lambda_0 u} + u(\lambda - \lambda_0)\, e^{-\lambda_0 u} \right| \leqslant \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2}\, u^2\, e^{-\frac{\lambda_0 u}{2}}$$

*b.* En déduire que les dérivées de $f$ et de $g$ existent en tout point $\lambda_0 > 0$ et que l'on a :

$$f'(\lambda_0) = -\int_0^{\infty} \frac{u\, e^{-\lambda_0 u} \cos u}{(u+x)^2}\, du$$

$$g'(\lambda_0) = -\int_0^{+\infty} \frac{u\, e^{-\lambda_0 u} \sin u}{(u+x)^2}\, du$$

*c.* Montrer que $h$ est dérivable dans $]\,0, +\infty\,[$.

5° *a.* Montrer que la fonction $\lambda \to l(\lambda)$ définie par $l(\lambda) = e^{-\lambda x} h(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(u+x)} \sin u}{u+x}\, du$, est dérivable dans $]\,0, +\infty\,[$.

*b.* Calculer la dérivée $l'(\lambda)$ (on pourra utiliser la fonction G).

*c.* En déduire que $l(\lambda) = -\int_0^{\lambda} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt + h(0)$ pour tout $\lambda > 0$.

6° Montrer que $\lim_{x \to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u\, du}{u+x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$.

Pour cela, on montrera successivement les deux inégalités :

*a.* $\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{u}\right) du \right| \leqslant x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u+x} \qquad \forall x > 0$

*b.* $\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \sin u \left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{u}\right) du \right| \leqslant x \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{du}{u^2} \qquad \forall A > \frac{\pi}{2}, \ \forall x > 0$

En déduire l'existence de $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ et la conclusion annoncée.

7° En utilisant la fin de la cinquième question, montrer que

$$h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt.$$

En déterminant la limite, lorsque $x \to 0^+$ de l'intégrale du dernier membre de cette égalité (utiliser par exemple 3° *a.*), déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$.

Calculer également $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du$.

.../...

-3-

## DEUXIÈME PARTIE

On considère la fonction $\delta$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi xt)\, \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

1° En utilisant la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ calculer $\delta(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que $\delta$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X. Reconnaissez-vous cette densité ?

2° On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ayant la même densité de probabilité $\delta$, la densité de la variable X + Y est :

$$\delta_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \delta(t-x)\, dx.$$

En utilisant les expressions de $\delta(t)$ trouvées précédemment, calculer $\delta_2(t)$ et montrer que :

$$\delta_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi xt) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

3° Soient $n$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes, de même loi de densité $\delta$. La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ a alors pour densité $\delta_n$ avec $\delta_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \delta_{n-1}(t-x)\, dx$.

*a.* Montrer que si l'on désigne par $F_n$ une primitive (pour $n > 1$) de $\delta_n$, on a :

$$\pi \left[ F_{n-1}\left(t + \frac{1}{2\pi}\right) - F_{n-1}\left(t - \frac{1}{2\pi}\right) \right] = \delta_n(t).$$

*b.* En admettant que l'on peut permuter les intégrations sur l'intervalle $\left[t - \frac{1}{2\pi},\ t + \frac{1}{2\pi}\right]$ et sur $]-\infty, +\infty[$ montrer que la densité $\delta_n$ est définie par :

$$\delta_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi xt) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx.$$

Quelle est la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t)\, dt$ ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail